

**EXERCICE N°1 : ( 3points )**

Répondre par **vrai** ou **faux**, sans justification.

1-/Dans la figure ci-contre **ABCDEFGH** est un cube d'arête **2**.

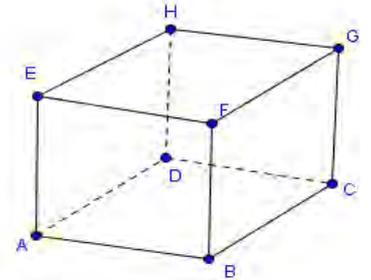
a-)  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{AB} \wedge \vec{AD} = \vec{AE}$  .b-)  $\vec{BG} \cdot \vec{BH} = 2$  c-)  $\sin(\text{HBG}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2-/L'ensemble des points **M** de l'espace  $\mathcal{E}$  tels que

$\vec{MA}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{MB} = \vec{AB}^2$  est un plan .

3-/ L'ensemble des points **M** de l'espace  $\mathcal{E}$  tels que  $\vec{AB} \cdot \vec{MB} = \vec{AB}$  est une sphère

4-/  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  est un vecteur directeur de la droite intersection des plans **(ACG)** et **(BDH)**.



**EXERCICE N°2 : ( 6points )**

L'espace  $\mathcal{E}$  étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  .

On considère les points **A**( 0 , 1 , 0 ) ; **B** ( 1 , 0 , -2 ) ; **C** ( 0 , 0 , -1 ) et **D**( 1 , -1 , 0 ) .

1-/ a-) Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  puis calculer  $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}$

b-) En déduire que les points **A**, **B**, **C** déterminent un plan **P** et que les points **A**, **B**, **C**, et **D** ne sont pas coplanaires.

c-) Calculer l'aire du triangle **ABC** et le volume du tétraèdre **DABC**, puis déduire la distance de **D** à **P**.

2-/a-) Montrer qu'une équation cartésienne du plan **P** est **x-y+z+1=0** .

b-) Montrer que **H**(0, 0, -1) est le projeté orthogonal de **D** sur **P**.

3-/ On considère  $S = \{M(x, y, z) \text{ tels que } x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2 = 0\}$

a-) Montrer que le point **E**( 2 , -2,  $\sqrt{2}$  ) appartient à **( S )** .

b-) Montrer que **S** est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

c-) Montrer que **P** et **S** sont sécants suivant un cercle  $\mathcal{C}$  que l'on caractérisera.

4-/ Déterminer l'ensemble des points **M** de **P** tels que le triangle **DME** soit isocèle et rectangle en **D**

**EXERCICE N°3 : ( 3points )**

Ci -Dessous la représentation **Cf** d'une fonction **f** définie et dérivable sur  $]1, +\infty[$ .

Les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  d'équations **x=1** et **y=x-4** sont des asymptotes à **Cf**.

**A** désigne l'aire exprimée en unité d'aire de la partie délimitée par **Cf**, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives **x=3** et **x=5**

1-/a-) Par lecture graphique donner la position relatives de

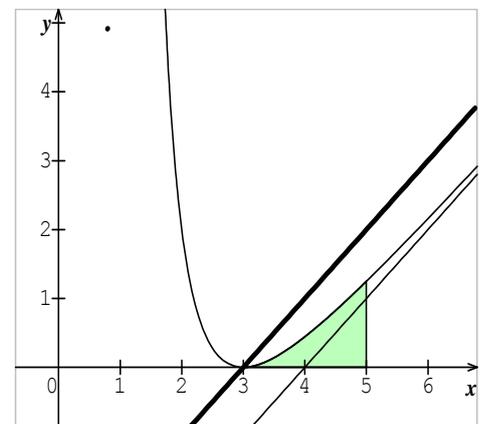
**Cf** et  $\Delta'$  d'équation **y=x-3**

b-) En déduire que **A** ≤ 2.

c-) Par des considérations d'aires prouver que **A** >  $\frac{1}{2}$

2-/ Soit  $J = \int_3^5 x f'(x) dx$ . A l'aide d'une intégration par partie, montrer que **J = 5f(5) - A**

3-/ Sachant que  $f(x) = x - 4 + \frac{4}{(x-1)^2}$ ; déterminer la valeur



de **A** puis déduire la valeur de **J**

**EXERCICE N°4 : ( 8points )**

1-/ Soit la fonction **f** définie sur  $[0, 1[$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$  et soit  $(\mathcal{C})$  sa courbe

représentative de un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- a-) Etudier la dérivabilité de **f** à droite en **0** .Interprétation géométrique ?
- b-) Dresser le tableau de variation de **f**.
- c-) Montrer que **f** admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$
- d-) Montrer que pour **x** de  $[0, +\infty[$  ;  $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
- e-) Tracer  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  courbe de la fonction  $f^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

2-/Soit **A** l'aire du domaine limité par la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équations respectives :

$x=0$  et  $y=1$ . Montrer que  $A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$  .

3-/On considère la suite  $(u_n)_n$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ .

- a-) Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est décroissante.
- b-) Prouver que la suite est convergente.
- c-) Montrer que pour tout **n** de  $\mathbb{N}$  ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$  , puis déduire la limite de la suite.

4-/ On considère la suite  $(v_n)_n$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1}$

- a-) Montrer que  $1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ .
- b-) En intégrant l'égalité précédente montrer que  $\forall n$  de  $\mathbb{N}$ ;  $v_n - I = (-1)^n u_n$  . où  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$
- c-) Montrer que  $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$  puis déduire la limite de la suite  $(v_n)_n$
- d-) Calculer  $v_3$  puis donner une valeur approchée de **I**

5-/ Soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  . On considère la fonction définie sur l'intervalle

$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par  $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$  .

- a-) Montrer que **F** est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et que  $F'(x) = \varphi(\tan x)$
- b-) Déterminer **F(x)** dans chacun des cas suivants ;  $\varphi(t) = 1$  ,  $\varphi(t) = t^2$ .
- c-) En déduire que  $I = \frac{\pi}{4}$  puis tirer la valeur de **A**.